

【論文】

定期発注方式における安全在庫量の最適化

—— 品切れコストが所与の場合 ——

星 野 珙 二

1. はじめに

定期発注方式の研究は、H.A. Simon[1]による生産管理へのサーボメカニズムの応用研究が発端となっている。この研究においては、発注量の変動と期末在庫量（品切れに関わる納入直前の在庫量のこと、以下本論では最小在庫量と呼ぶことにする）の変動とがトレード・オフの関係にあることを明らかにし、両者に対するコントロールのためのパラメータを導入し、それらの性質を議論したものである。生産管理の立場からすれば、できるだけ安定生産を維持したいために生産量の変動に結びつく発注量の変動は小さく抑えたい。そのためには、在庫量の変動でそれに応えなければならないが、在庫量の変動は結果として保持すべき在庫量の水準を押し上げ、保管費用を増大化することになってしまう。こうした難しい問題に対して解決の見通しを与えるために、Simonは新しいモデルを提案し定式化を行い、一定の解析結果を示している。

その後、定期発注方式の研究はH.J. Vassian [2], R. Pinkham [3], 十代田 [4]等によって、精緻な研究が積み重ねられていくが、他の発注方式と比較した場合の特徴およびどのような状況や条件のもとで定期発注方式が効果的であるかなど、発注方式という広い領域の中での当該方式の位置づけについては、ほとんど手付かずのままであった。とりわけ、村松等 [5], 星野 [6]が行ってきた発注方式の比較研究という立場からは、必ずしも十分な検討がなされてきたとは言いがたい。発注方式の比較研究においては、一定の評価基準を定める必要があり、それはしばしばトータル・コストという統合的な尺度を用いてなされる場合が多い。定期発注方式は、上記のように主として物量のコントロールという問題関心から取り組まれてきた経緯があり、一元的にコスト尺度に変換して評価することを「よし」としてこなかった。しかしながら、発注方式の比較研究では、同一のコスト条件を与えてはじめて比較分析が可能になる。

本稿では、K.J. Arrow, T. Harris, and J. Marschak [7]が在庫管理の最適政策（“Optimal Inventory Policy”）として提案した $\langle r, R \rangle$ 発注方式と定期発注方式とを比較するためのシミュレーション研究（星野 [8]）から派生した問題を取り上げる。 $\langle r, R \rangle$ 発注方式と定期発注方式との比較研究を行うためには、コスト条件、とりわけ品切れコストを所与としてトータル・コストを比較することが必要であった。そして、この比較分析の過程で派生的に明らかになったことは、定期発注方式の最終局面のコストの比較を行う場面において、当該方式には安全在庫量の設定というも

うひとつの最終選択肢が残されている、ということであった。そうした安全在庫量の最適化を経て、これらの 2 つの方式の比較分析が可能となる。そこで、今回の研究では、品切れコストが所与である場合の定期発注方式における安全在庫量の最適な設定方法について議論する。すなわち、定期発注方式におけるトータル・コストを最小化する安全在庫量の設定方法について提案する。

2. 定期発注方式における安全在庫量の扱い

それでは、定期発注方式における典型的な安全在庫量に関する取り扱いについて見ておくことにしよう。ただし、需要量に関しては、各期独立で定常分布に従うことを、また需要量予測誤差に関しても各期独立で正規分布に従うことを仮定する。

定期発注方式は、基本的に 2 つの構造方程式によって表される。ひとつは発注量計算式であり、もうひとつは在庫量推移式である。いま、話を簡単にするため、発注間隔は T^* 、納入リードタイムはゼロ ($L=0$) の場合を考えてみる。ここで、定期発注方式においてはたとえ納入リードタイムがゼロの場合であっても、発注間隔 T^* に相当する期間の需要量予測値に基づいて発注が行われることに留意しておこう。

$$Q_t = \hat{D}_t - I_{t-1} + S \quad (1)$$

$$I_t = I_{t-1} + Q_t - D_t \quad (2)$$

ただし、 Q_t : t 期の発注量、 $\hat{D}_t$: t 期の需要量予測値、 D_t : t 期の需要量

I_t : 定期発注方式の t 期の最小在庫量、 S : 安全在庫量

いま注目している安全在庫量の水準は、一定のサービス率 ($=1 - \text{品切れ率}$) を維持することを目的に設定されることから、結果的には最小在庫量の変動の大きさに依存して決定されることになる。そこで、最小在庫量の分散を求めるため、式 (2) を式 (1) へ代入して整理すると、次の関係式が得られる。

$$I_t - S = \hat{D}_t - D_t \quad (3)$$

さらに、 t 期の需要量予測誤差を E_t で表せば、式 (3) は次のように書き表すことができる。

$$I_t - S = E_t \quad (4)$$

ただし、 $E_t = \hat{D}_t - D_t$

ここで、安全在庫量 S は計画期間では一定と考えられることから、次式が成立する。

$$V(I_t) = V(E_t) \quad (5)$$

また、(5) 式は、上で述べた定常性の仮定より、次のように表すことができる。

$$V(I) = V(E) \quad (6)$$

さらに L が T^* と等しい場合 (L については T^* を 1 単位として整数表現すれば $k=1$ となる) は、定期発注方式においては予測対象期間が $LT = L + T^* = 2T^*$ となる。この予測対象期間の長さ LT を管理上のリードタイムと呼ぶことにする。この場合も定期発注方式における発注量計算式と

在庫量推移式から、同様の論理展開によって、 I の分散は次式で表される。また、上で述べた需要量予測誤差が各期独立であるという仮定から、分散の加法性を適用することができ、次が得られる。

$$V(I)=2V(E) \quad (7)$$

以上から、一般の $L=kT^*$ に対しては管理上のリードタイムの長さが $LT=(k+1)T^*$ となり、次のような一般式で表すことができる。

$$V(I)=(k+1)V(E) \quad (8)$$

このことから、最小在庫量の変動に依存して設定される定期発注方式の安全在庫量の水準は、結論的には、管理上のリードタイム中の需要予測誤差の変動に依存して決定されることが分かる。この変動については分散あるいは標準偏差という統計量で処理することが自然であり、上述の正規分布に従うという仮定から、所与の品切れ率を維持するための安全在庫量の水準は正規分布表の100%分位点を調べることによって容易に決定することができる。

定期発注方式における安全在庫量の扱いについては、このように品切れコストを明示的に与えて水準を決定するのではなく、品切れ率を考慮しながら政策的に処理されることが一般的となっている。あるいは、発注量変動や在庫量変動に関してのコスト・パラメータを導入し、それらの相対的な比率によってシステムをコントロールしようと考えている。

3. 品切れコストが与えられた場合の安全在庫量の最適化

ところで、 $\langle r, R \rangle$ 発注方式においては、保管費用、発注(補充)費用および品切れ費用が明示的に与えられることで、あるいはコスト・パラメータとして与えられることで、最適な r と R が同時決定されるシステムになっている。既に述べたように、 $\langle r, R \rangle$ 発注方式と定期発注方式との比較を行う際には、同様に品切れ費用を明示的に与えなければ分析は困難になる。本節では、定期発注方式においてもそのように品切れ費用が与えられれば、安全在庫量を最適化する方法が提案可能であることを示してみよう。

さて、簡単のため計画対象期間を一年として、定期発注方式の総費用関数を定式化すれば次のようになる。

$$TC=C_h+C_o+C_s \quad (9)$$

ただし、 TC ：年間総在庫費用

C_h ：年間在庫保管費用

C_o ：年間発注費用

C_s ：年間品切れ費用

さらに、 C_h 、 C_o および C_s については、一般に次のように定式化される。

$$C_h=h \cdot p \cdot (E(q)+S) \quad (10)$$

ここで, h : 年間保管費率

p : 1 単位当たりの価格

$E(q)$: 安全在庫量分を除く発注量の期待値

S : 安全在庫量

$$C_o = o \cdot (H/T^*) \quad (11)$$

ここで, o : 1 回当たりの発注費用

H : 期間 1 年の長さ

T^* : 発注間隔の長さ

$$C_s = E(i | i < 0) \cdot s \cdot (H/T^*) \quad (12)$$

ここで, $E(i | i < 0)$: 発注当たり品切れ量の期待値

s : 品切れ 1 単位当たりの損失

以上から, 年間総在庫費用は次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} TC &= h \cdot p \cdot (E(q) + S) + o \cdot (H/T^*) + E(i | i < 0) \cdot s \cdot (H/T^*) \\ &= h \cdot p \cdot (E(q) + S) + o \cdot n + \left\{ \int_s^o (i - S) \phi(i) di \right\} \cdot s \cdot n \end{aligned} \quad (13)$$

ただし, n : 発注回数

i : 最小在庫量の水準

$\phi(i)$ 最小在庫量の確率密度関数

式 (13) において安全在庫量に関係するところは第 1 項と第 3 項であり, 前者は S が大きくなるにつれて増加し, 後者は S が大きくなるにつれて減少する。そこで, 最小値をを与える条件を求めるために, 上式を S で微分してゼロと置いてみる。

$$\frac{dTC}{dS} = h \cdot p - s \cdot n \int_s^o i \phi(i) di = 0 \quad (14)$$

これより以下の条件が得られる。

$$\int_s^o i \phi(i) di = \frac{h \cdot p}{s \cdot n} \quad (15)$$

4. 数値例による検証

さて, 上記の最小化条件を実際の数値例に基づいて検証してみよう。数値例は北原・児玉 [9] が $\langle r, R \rangle$ 発注方式を説明する際に使用したものを引用することにする。この数値例は, 既に先行研究として, $\langle r, R \rangle$ 発注方式と定期発注方式の比較研究の際に星野 [8] が取り扱っているものでもある。

この数値例では, 需要については 0 から 10 の間の連続的な一様分布に従うことを想定し, 以下のような経済的諸条件を仮定している。

$$h \cdot p = n \cdot h' \cdot p = n \cdot 0.05 \cdot 20000 \text{ (円)}$$

ただし、 h' : 1 期間当たり保管費率

$o=4500$ (円/1 回)

$s=9000$ (円/1 単位)

図 1 は、以上の仮定のもとで、 $\langle r, R \rangle$ 発注方式と定期発注方式のシミュレーション結果を比較したものである（詳しいシミュレーションの条件は [8] を参照されたい）。これによれば、需要量と需要予測量との相関係数 ρ が 0.9 というような需要予測の精度が極めて高い場合において、定期発注方式は $\langle r, R \rangle$ 発注方式よりも経済的に有利になる場合があることを示している。さらに、図 1 は、もうひとつの重要なことを教えている。定期発注方式の在庫費用が安全在庫水準の変化に対して下に凸のグラフとなることから、適切な安全在庫水準を設定する必要があるということである。本稿の研究関心はこのことに端を発している。

式 (15) に前述の経済的条件を代入すると以下が得られる。

$$\int_s^o i\phi(i)di = \frac{h \cdot p}{s \cdot n} = \frac{n \cdot 0.5 \cdot 20000}{9000 \cdot n} = 0.111 \quad (16)$$

そこで、正規分布表から品切れ率 0.111 なる分位点を求めると次が得られる。

$$\xi = 1.22 \quad (17)$$

一方、今回の定期発注方式のシミュレーション結果からは、表 1 に示すように、需要予測の精度

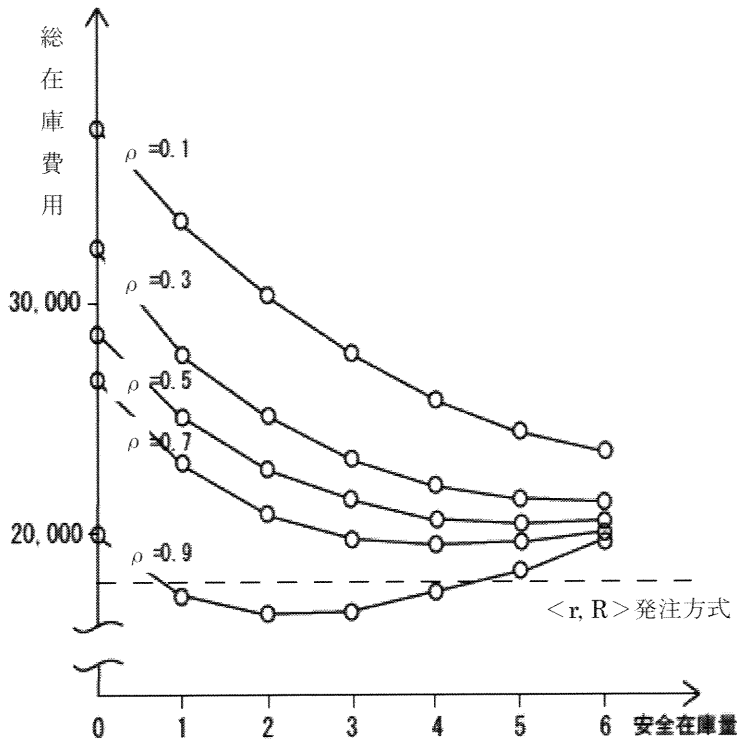


図 1 安全在庫量と総在庫費用の関係

表 1 定期発注方式の発注量および最小在庫量に関するシミュレーション結果

相関係数	発注量		最小在庫量	
	平均値	標準偏差値	平均値	標準偏差値
$\rho=0.1$	6.80	6.60	-0.46	5.29
$\rho=0.3$	6.77	6.21	-0.01	4.75
$\rho=0.5$	6.83	5.56	0.05	3.90
$\rho=0.7$	6.83	5.08	-0.12	3.07
$\rho=0.9$	6.84	4.33	0.09	1.77

を示す需要量と需要量予測値との間の各相関係数 ρ に対する発注量および最小在庫量の標準偏差が求められている。

表 1 の最小在庫量の分布に基づいて、式 (17) の関係を満たす総在庫費用を最小化する安全在庫量の水準 S を標準正規分布から実際の分布に変換することによって求めてみよう。 $\rho=0.9$ のときは以下の計算で求められる。

$$S = \xi \cdot \sigma(i) + \mu = 1.22 \times 1.77 + 0.09 = 2.25 \quad (18)$$

同様の手順を各相関係数に対応する最小在庫量の分布に適用し、表 2 が得られる。

表 2 最適な安全在庫量水準

相関係数	安全在庫量
$\rho=0.1$	6.45
$\rho=0.3$	5.80
$\rho=0.5$	4.76
$\rho=0.7$	3.75
$\rho=0.9$	2.25

ここで求められた総在庫費用を最小化する安全在庫量の水準は、図 1 に照らしてみると、各相関係数に応じたグラフの最小値を与えるポイントになっていることが確認できる。

5. おわりに

本稿では、定期発注方式の運用に際して品切れ費用が明示的に与えられるならば、総在庫費用を最小化するための安全在庫量の設定が、一定の合理的手続きを踏むことによって可能であることを示した。典型的な定期発注方式の運用においては、最小在庫量の変動の大きさを踏まえながら、品切れ費用と保管費用の大きさを斟酌しながら政策的に決定することが行われてきている。今回の研究では、そうした安全在庫量の設定に関する考え方そのものは正しいものの、それを一歩踏み込ん

で具体的な方法論として活用できることを示した。また、今回の提案は、シミュレーションによる数値例の結果と符合するものとなっている。

参考文献

- [1] Simon, H.A.: “On the application of servo-mechanism theory in the study of production control”, *Econometrica*, pp. 247-268, Vol. 20, (1952)
- [2] Vassian, H.J.: “Application of discrete variable servo theory to inventory control”, *Operations Research*, Vol. 3, No. 3, pp. 272-282 (1955)
- [3] Pinkham, R.: “An approach to linear inventory-production rules”, *Operations Research*, Vol. 6, No. 2, pp. 185-189 (1958)
- [4] 十代田三知男: “定期発注システムにおける発注量および在庫量の変動に関する研究”, 早稲田大学博士論文 (1971)
- [5] 村松林太郎, 十代田三知男, 星野珙二: “定期発注方式と定量発注方式の選択に関する研究”, (社)日本経営工学会論文誌, Vol. 26, No. 3, pp. 238-243 (1975)
- [6] 星野珙二: “発注方式の選択と統合発注方式に関する研究”, 早稲田大学博士論文 (2006)
- [7] Arrow, K.J., Harris, T. and Marschak, J.: “Optimal inventory policy”, *Econometrica*, Vol. 19, pp. 250-272 (1951)
- [8] 星野珙二: “ $\langle r, R \rangle$ 発注方式と定期発注方式の比較研究—シミュレーションによる一つの接近—”, 商学論集 (福島大学), Vol. 63, No. 3, pp. 49-57 (1995)
- [9] 北原貞輔, 児玉正憲: 「OR による在庫管理システム」, 九州大学出版会 (1982)