説　苑

ジニ係数の一般化とその分解

豊田　敬

0. 序

ジニ係数は，税の再分配効果の測定などにも使用される[1]ことが多く，最も普及している不平等尺度であるといっても過言ではない。本稿では，F. Mehran と筆者とによって別個に提案されたジニ係数の一般化は同じである[2]ということと，その分解可能性について論じる。

Mehran〔6〕は，ジニ係数を含む「線型尺度」(linear measure) を提示した。この線型尺度は，ジニ係数のみならず相対平均偏差や相対範囲を含むものである。一方，豊田〔7〕は個別データの所得分布に対して，ジニ係数が順序統計量の1次結合として表わされる点に着目し，ジニ係数を含み，かつローレンツ曲線による不平等比較と矛盾しない不平等尺度を提示した。さらに，豊田〔8〕において，この尺度のクラスを「ジニ型の尺度」と称して若干の考察を加えた。

第1節では，ピグー＝ドールトンの移転原理[3]を満足するスコア関数をもつ線型尺度のクラスは，Mehran〔6〕における個別データの所得分布 二四〇

1） たとえば，石〔3〕参照。

2） この点に関しては，寺崎康博氏による示唆が契機となった。お礼を申し上げる。

3） たとえば，青木〔2〕78頁参照。

に対する表現を訂正すれば，ジニ型の尺度と実質的には同じであることを示す。第2節では，所得分布をいくつかのグループの分布に分解[4]したとき，各グループ内不平等度とグループ間不平等度とに自然な形に分解できる線型尺度はジニ係数に限られる[5]ことを示す。

1. 個別データの場合の線型尺度

所得分布の累積分布関数を $F(x)$（ただし，$x \geq 0$），その平均所得を μ（ただし，$0<\mu<\infty$）とする。F の逆を，

$$F^{-1}(t)=inf\{x \mid F(x) \geq t\}, \qquad for\ t \in [0,\ 1]$$

で定義する。Mehran の線型尺度は，

$$I=\frac{1}{\mu}\int_0^1 (F^{-1}(t)-\mu)W(t)dt \cdots\cdots\cdots (1)$$

ただし，$W(t)$ は F の形と無関係なある与えられた関数，

と表わされる。

$W(t)$ を狭義単調増加関数とすると，尺度 I はピグー＝ドールトンの移転原理を満たす[6]。ピグー＝ドールトンの移転原理はローレンツ準順序と同等[7]であるから，この尺度 I による不平等比較はローレンツ曲線による不平等比較と矛盾しない。

$$\int_0^1 W(t)dt=0 \cdots\cdots\cdots (2)$$

4）ただし，各グループの分布の範囲が重なり合わないような分解である。

5）ジニ係数が分解可能であることは知られている。たとえば，青木〔2〕111頁，豊田〔7〕29頁参照。

6）Mehran〔6〕p. 807 参照。

7）たとえば，青木〔2〕79頁参照。

を仮定しても一般性は失われない。そうすると，（1）は，

$$I=\frac{1}{\mu}\int_0^1 F^{-1}(t)W(t)dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1')$$

となる。いま，n 人の所得が個別データ，

$$0\leq x_1\leq x_2\leq\cdots\cdots\leq x_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

で与えられているとする。この場合の（1′）を Mehran は，

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}W\left(\frac{i}{n+1}\right)\frac{x_i}{\mu} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

と表わしている。しかし，（3）の累積分布関数は，

$$F(x)=\frac{1}{n}\cdot max\{i\,|\,x_i\leq x\}$$

であり，この F の逆は，

$$F^{-1}(t)=x_i, \qquad for\ t\in\left(\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right),\ i=1,\ \cdots,\ n$$

ただし，$F^{-1}(0)=0$,
であるから，F^{-1} を定義通りに解すると，(1′) は，

$$I_n=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{(i-1)/n}^{i/n}W(t)dt\right]\frac{x_i}{\mu} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

と表わされる。 二三八

$$\omega_n(i)=\int_{(i-1)/n}^{i/n}W(t)dt, \qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

とおくと，

$$\sum_{j=1}^{r}\omega_{nr}((i-1)r+j)=\sum_{j=1}^{r}\int_{((i-1)r+j-1)/nr}^{((i-1)r+j)/nr}W(t)dt$$
$$=\int_{(i-1)/n}^{i/n}W(t)dt=\omega_n(i)^{8)}$$

であり，$dW(t)/dt>0$ ならば $\omega_n(i)$ は i の狭義単調増加関数であるから，（4）を（5）のように訂正すれば，ジニ型の尺度と実質的には同じものになる。

さらに，

$$d_i=\omega_n(i)-\omega_n(i-1),\qquad i=2,\ \cdots,\ n$$

とおくと，$d^2W(t)/dt^2<0$ ならば d_i は i の狭義単調減少関数，$d^2W(t)/dt^2>0$ ならば d_i は i の狭義単調増加関数である。このとき（5）は，それぞれ逓減的移転原理 (diminishing transfer principle)[9]，逓増的移転原理を満たす尺度となる。

以下に多項式のスコア関数をもつ尺度の例を挙げる。

$W(t)=2t-1$ とおけば，（2）を満足し，

$$\omega_n(i)=\frac{2i-n-1}{n^2},\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

8） 豊田〔8〕（豊田〔7〕）における $a(n,\ i)$ $(a_n(i))$ は $\omega_n(i)=a(n,\ i)/n$ $(=a_n(i)/n)$ であるから，

$$a(n,\ i)=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}a(nr,\ (i-1)r+j),\ i=1,\ \cdots,\ n$$

は

$$\omega_n(i)=\sum_{j=1}^{r}\omega_{nr}((i-1)r+j),\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

となる。

9） Mehran〔6〕p. 808 参照。逓減的移転原理（diminishing transfer principle）という用語は Kolm〔5〕による。豊田〔8〕244頁では，逓減的移転原理を『ジニ係数より相対的に低所得層を重視する』という表現を用いている。

である。この1次式のスコア関数をもつ線型尺度はジニ係数である。

$W(t)=-3t^2+6t-2$ とおけば，（2）を満足し，

$$\omega_n(i)=-\frac{3i^2-3i+1}{n^3}+3\left(\frac{2i-1}{n}\right)-\frac{2}{n},\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

である。これは Mehran〔6〕page 808, line 20, 豊田〔8〕237頁第8行の尺度である。

$W(t)=3t^2-1$ とおけば，（2）を満足し，

$$\omega_n(i)=\frac{3i^2-3i+1}{n^3}-\frac{1}{n},\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

である。これは豊田〔7〕22頁第8行[10]，豊田〔8〕237頁第6行の尺度である。

一般に，r 次多項式のスコア関数，

$$W(t)=\sum_{i=0}^{r}a_it^i$$

を考えると，$(a_r/(r+1))+\cdots+(a_i/(i+1))+\cdots+a_0=0$,
そして $0\leq t\leq 1$ において $dW(t)/dt>0$;
$d^2W(t)/dt^2\leq 0$ または $d^2W(t)/dt^2\geq 0$ となるように $a_i(i=0,\ 1,\ \cdots,\ r)$ を定めれば，ピグー＝ドールトンの移転原理を満足する不平等尺度を作ることができる。このとき，

$$\omega_n(i)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{r}\frac{a_j}{j+1}\left[\sum_{k=0}^{j}\left(\frac{i}{n}\right)^k\left(\frac{i-1}{n}\right)^{j-k}\right],\qquad i=1,\ \cdots,\ n$$

である。

10) ただし，同箇所において $c_1=1$, $c_2=0$, $c_3=-1$ とおいたものである。

2. 線型尺度の分解

所得分布 F が k個のグループの所得分布 $F_1, \cdots, F_k$ に分解されるとし，グループ全体の人数に対する各グループの人数比を $p_1, \cdots, p_k$ とする。また，各グループの平均所得を $\mu_1, \cdots, \mu_k$ とする。

$$\sum_{i=1}^{k} p_i=1, \qquad F=\sum_{i=1}^{k} p_i F_i, \qquad \mu=\sum_{i=1}^{k} p_i \mu_i$$

である。

$F_1, \cdots, F_k$ の分布の範囲が重ならない，すなわち，

$$M_{i-1}=inf\{x \mid F_{i-1}(x)=1\}<m_i=sup\{x \mid F_i(x)=0\}, \qquad i=2, \cdots, k$$

とする。このとき，

$$F(x)=\sum_{j=1}^{i-1} p_j+p_i F_i(x), \quad for\ x\in(M_{i-1}, m_{i+1}), \qquad i=1, \cdots, k$$

ただし，$i=1$ のとき $M_0=0\leq x<m_2$, $i=k$ のとき $M_{k-1}<x<m_{k+1}=\infty$, であるから，$P_i=p_1+\cdots+p_i$ とおくと，

$$F^{-1}(t)=F_i^{-1}\left(\frac{t-P_{i-1}}{p_i}\right), \quad for\ t\in(P_{i-1}, P_i), \qquad i=1, \cdots, k$$

ただし，$i=1$ のとき $P_0=0\leq x\leq P_1$,

二三五 となる。したがって，所得分布 F の不平等度は，

$$I=\frac{1}{\mu}\int_0^1 (F^{-1}(t)-\mu)W(t)dt$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\mu}\int_{P_{i-1}}^{P_i} F_i^{-1}\left(\frac{t-P_{i-1}}{p_i}\right)W(t)dt-\int_0^1 W(t)dt$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i}{\mu}\int_0^1 F_i^{-1}(t)W(p_it+P_{i-1})dt-\int_0^1 W(t)dt \quad \cdots\cdots (6)$$

と表わされる。

グループ間の所得分布は，

$$F_b(x)=P_i, \quad for\ x\in(\mu_i,\ \mu_{i+1}), \quad i=0,\ 1,\ \cdots,\ k$$

ただし，$\mu_0=0$, $\mu_{k+1}=\infty$,

であるから，

$$F_b^{-1}(t)=\mu_i, \quad for\ t\in(P_{i-1},\ P_i), \quad i=1,\ \cdots,\ k$$

ただし，$i=1$ のとき $P_0=0\leq t<P_1$,

となる。また，

$$\int xdF_b=\sum_{i=1}^{k}p_i\mu_i=\mu$$

である。したがって，グループ間の分布 F_b の不平等度は，

$$\begin{aligned}I_b&=\frac{1}{\mu}\int_0^1(F_b^{-1}(t)-\mu)W(t)dt\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\mu_i}{\mu}\int_{P_{i-1}}^{P_i}W(t)dt-\int_0^1 W(t)dt\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i\mu_i}{\mu}\int_0^1 W(p_it+P_{i-1})dt-\int_0^1 W(t)dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)\end{aligned}$$

と表わされる。

（6），（7）を合わせると，

$$I=\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i\mu_i}{\mu}\left[\frac{1}{\mu_i}\int_0^1(F_i^{-1}(t)-\mu_i)W(p_it+P_{i-1})\,dt\right]+I_b \cdots (8)$$

となる。各グループの分布 F_i $(i=1, \cdots, k)$ の不平等度は，

$$I_i=\frac{1}{\mu_i}\int_0^1 (F_i^{-1}(t)-\mu_i)W(t)dt, \qquad i=1, \cdots, k$$

であるから，（8）が，

$$I=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i I_i+I_b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

なる形に表現されるためには，スコア関数 $W(p_i t+P_{i-1})$ において，P_{i-1} が分離されなければならない。すなわち，

$$W(p_i t+P_{i-1})=g(p_i t)+h(P_{i-1}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

または，

$$W(p_i t+P_{i-1})=g(p_i t)h(P_{i-1}) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

と表わされなければならない。関数方程式 (10), (11) の無意味でない解は，それぞれ，

$$\left.\begin{aligned} W(t)&=ct+a+b \\ g(t)&=ct+a \\ h(t)&=ct+b \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10')$$

$$\left.\begin{aligned} W(t)&=abe^{ct} \\ g(t)&=ae^{ct} \\ h(t)&=be^{ct} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11')$$

である[11)]。

$$\int_0^1 (F_i^{-1}(t)-\mu_i)dt=0$$

11) Aczél〔1〕p. 142参照。

に留意すると，(10′) の場合（8）は，

$$I=\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i^2\mu_i}{\mu}\left[\frac{1}{\mu_i}\int_0^1 ct(F_i^{-1}(t)-\mu_i)\,dt\right]+I_b$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i^2\mu_i}{\mu}I_i+I_b$$

となり，自然な形に分解できる。(10′) において，$c=2$, $a+b=-1$ とおけば，$W(t)=2t-1$ となる。第1節で記したように，このスコア関数をもつ線型尺度はジニ係数である[12]。分解のウェイト $p_i^2\mu_i/\mu$ は，このグループの人数比と所得比との積である。

(11′) の場合（8）は，

$$I=\sum_{i=1}^{k}\frac{p_i\mu_i exp(cP_{i-1})}{\mu}\left[\frac{1}{\mu_i}\int_0^1 ab\,exp(cp_it)(F_i^{-1}(t)-\mu_i)dt\right]+I_b$$

となるが，被積分関数の e の巾の因子 p_i を分離できないので，（9）のような形には表わせない。

参考文献

〔1〕 Aczél, J., *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, 1966.

〔2〕 青木昌彦『分配理論』筑摩書房，1979年。

〔3〕 石弘光『租税政策の効果』東洋経済新報社，1979年。

〔4〕 Gastwirth, J. L., "A General Definition of the Lorenz Curve," *Economeirica*, Vol. 39, 1971, pp. 1037-9.

〔5〕 Kolm, S. Ch., "Unequal Inequalities II," *Journal of Economic Theory*, Vol. 13, 1976, pp. 82-111.

〔6〕 Mehran, F., Linear Measures of Income Inequality," *Econometrica*, Vol. 44, 1976, pp. 805-9.

〔7〕 豊田敬「所得分布の不平等度――不平等度の比較と尺度――」『国民経

12) ジニ係数を1次変換した尺度も分解可能であることはいうまでもない。